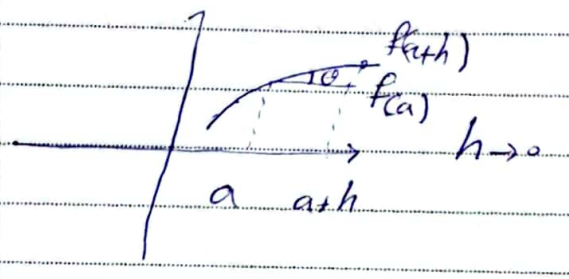
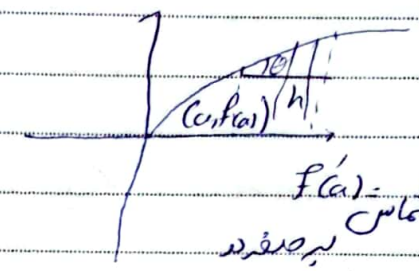
«مشتق»

مشتق: f یک تابع باشد، مشتق تابع f در نقطهٔ a به صورت $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تعریف می‌شود. اگر مقدار فوق متناهی باشد گوییم f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است.





$f'(a)$ = شیب خط مماس بر صفحه $(a, f(a))$

A قوانین مشتق

مشتق تابع ثابت صفر است.

① $f(x) = x^n$ که $n>0$ $\quad \frac{df}{dx} = f'(x) = nx^{n-1}$

② اگر u تابعی از x باشد آنگاه $\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1}u'$

(برای $n<0$ اگر f در x مشتق‌پذیر باشد، $f(x)\neq 0$ باشد، $\frac{df^n}{dx} = nf^{n-1}\frac{df}{dx}$

$n<0$ و $f(x)$ مشتق‌پذیر باشد $f(x)\neq 0$

$$\frac{df^n(x)}{dx} = nf(x)^{n-1}\frac{df}{dx}$$

③ f, g هر دو مشتق‌پذیر باشند، $f\pm g$ نیز مشتق‌پذیر است.

④ f, g هر دو مشتق‌پذیر باشند. $\frac{d(fg)}{dx} = g\frac{df}{dx} + f\cdot\frac{dg}{dx}$

⑤ اگر f و g مشتق‌پذیر باشند و $f(x)\neq 0$

$$\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dx} = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2} \qquad \frac{f}{g} = f.g^{-1}$$

$$\frac{d\frac{f}{g}}{dx} = \frac{d(f.g^{-1})}{dx} = g^{-1}f' + f(g^{-1})' = \frac{f'}{g} + f(-1)g^{-2}g'$$

$$= \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

۴) f مشتق پذیر و $c \in R$ ، $\frac{d(cf)}{dx} = c\frac{df}{dx}$

★ $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$ ★ $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$

$f(x) = \cos u \xrightarrow{f'(x)} f'(x) = (\sin u)\, u'$

u تابعی از x

$f(x) = \sin u \xrightarrow{d} f'(x) = u'\cos u$

★ $f(x) = \frac{1}{\cos x} = \sec x$ $f'(x) = \frac{0-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$= \tan x \sec x$

$f(x) = \frac{1}{\sin x} = \cancel{\cot x}\ \sec u \rightarrow f'(x) = \frac{0-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \operatorname{cosec} x$

$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$f(x) = \tan u \rightarrow f'(x) = u'(1 + \tan^2 u)$

$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \rightarrow y' = \frac{-\sin x \times \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x}$

$= \frac{-1}{\sin^2 x} = -1(1 + \cot^2 x)$

u تابعی از x

$$\frac{d(\cot u)}{dx} = -u'(1+\cot^2 u)$$

★ مشتق پارامتری

$y = f(t)$
$x = g(t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال) $y = t^2 - 2t \quad , x = t^3 + t^2 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t-2}{3t^2+2t} \qquad \frac{dy}{dx}(x=0) = \frac{1-2}{3} = \frac{-1}{3}$$

مشتق دوم

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2t-2}{3t^2+2t}\right) = \frac{2(3t^2+2t) - (6t+2)(2t-2)}{(3t^2+2t)^2}$$

$$= \frac{6t^2+4-12t^2+12t-4t+4}{(3t^2+2t)^2} = \frac{-6t^2+8t+8}{(3t^2+2t)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-6t^2+8t+8}{(3t^2+2t)^2} \div \frac{(3t^2+2t)}{1} = \frac{-6t^2+8t+8}{(3t^2+2t)^2} \times \frac{1}{3t^2+2t}$$

$$= \frac{-6t^2+8t+8}{(3t^2+2t)^3}$$

$$y''' = \frac{\frac{d(y'')}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال) $x = a\cos t \quad a>0$
$y = a\sin t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\cot t$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d(y')/dt}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1+\cot^2 t}{-a\sin t} = -\frac{1+\cot^2 t}{a\sin t}$$

$y = \cos x \qquad \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin(x + \frac{2h}{2}) \sin(\frac{h}{2})}{h} = -\sin x \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

$= -\sin x \times 1 = -\sin x$

نکات مهم:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \cos\beta$

$\alpha+\beta = A \Rightarrow \alpha = \frac{A+B}{2}$

$\alpha-\beta = B \Rightarrow \beta = \frac{A+B}{2}$

$\Rightarrow \cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha \sin\beta$

$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

مشتق ضمنی

مثال)

$f(x,y) = c$

$x^3 y + y^3 - 3x + 1 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 y + y' x^3 + 3y^2 y' - 3 = 0$

اثبات؟ $\frac{d \sin x}{dx}$?

$\Rightarrow y'(x^3 + 3y^2) = 3 - 3x^2 y \Rightarrow \boxed{y' = \frac{3 - 3x^2 y}{x^3 + 3y^2}}$

$f: A \to B$ یک تابع یک به یک ۱-۱ و پوشا بنابراین

$g: B \to A$

$g(b) = a \qquad f(a) = b$

$g \circ f = id_A \qquad f \circ g = id_B$

همانی

$\forall x \in A \qquad g \circ f(x) = x \qquad f \circ g(y) = y$

$g = f^{-1}$

$(g \circ f)(x) = x \qquad g(f(x)) = x \Rightarrow$ صفحه بعدی

$\alpha = \sin x$

$x = \arcsin \alpha$

$\sin^{-1} \alpha = x$

پوشا

$f: A \to B$

$\forall b \in B$

$\forall a \in A$

$f(a) = b$

پوشا نیست.

Arman

$$\Rightarrow \frac{dy}{df(x)} \times \frac{df(x)}{dx} = 1 \Rightarrow g'(f(x)) \times f'(x) = 1$$

$$\Rightarrow g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

وقتی تابع یک به یک و پوشا باشد. $f(x)=y$

قاعده زنجیری

$$y = (f \circ g)(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dg(x)} \times \frac{dg}{dx} = f'(g(x)) \times g'(x)$$

مثال) $y = (x^2 - 3x + \cos x)^3$

$$f(z) = z^3$$

$$z(x) = (x^2 - 3x + \cos x)$$

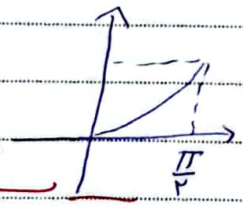
$$\frac{d(f \circ z)(x)}{dx} = \frac{df}{dz} \times \frac{dz}{dx} = 3z^2 \times (2x - 3 - \sin x)$$

$$= -3(x^2 - 3x + \cos x)^2 (2x - 3 - \sin x)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x, y, z, t) \\ \frac{df}{dx} = f'_x \end{array}}$$

مثال) $f(x) = \sin x$

$$\frac{df^{-1}}{d\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$



$\sin x = y$ $\quad$ $\text{Arcsin} = \sin^{-1}$

$$\frac{d\sin^{-1}(y)}{dy} = \boxed{\frac{1}{\cos x}}$$

$$\cos x = \sqrt{1-y^2} \qquad = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = \sin x$$

$$\frac{d(\cos^{-1} y)}{y} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{-1}{\sin x} \Leftrightarrow \text{Arc}\cos = \cos^{-1}$$

$$z = \tan^{-1}(y) \qquad y = \tan x$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow \text{Arctan} = \tan^{-1}$$

$$\frac{d(\cot^{-1}(y))}{dy} = \frac{-1}{1+y^2} \rightarrow Arc\cot = \cot^{-1}$$

$$z = \tan^{-1}(u(y))$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{u'(y)}{1+u^2}$$

$f: R \to R$

$x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$; $x_1, x_2 \in R$ هر گاه f را صعودی گوییم

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; $x_1, x_2 \in R$ هر گاه f را نزولی گوییم

اگر f مشتق پذیر باشد $f' > 0 \Leftrightarrow f$ صعودی می باشد.

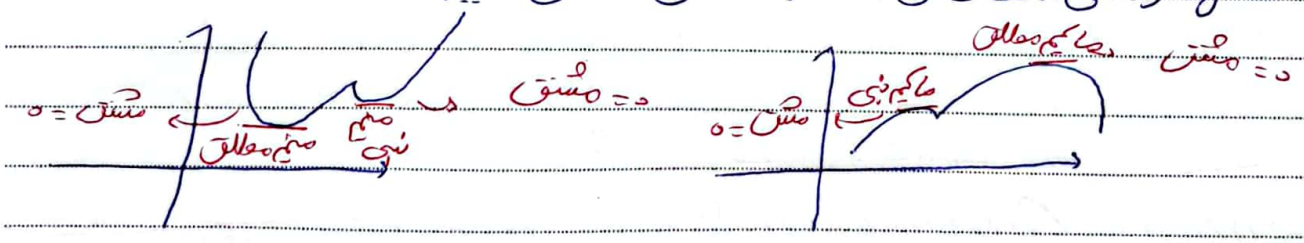
اگر f مشتق پذیر باشد $f' < 0 \Leftrightarrow f$ نزولی می باشد.

$$x > 0 \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

اگر $f'' > 0$ تقعر منحنی به طرف بالای های مثبت است.

اگر $f'' < 0$ تقعر منحنی به طرف بالای های منفی است.

$y' = 0$ زمانی اتفاق می افتد که انحنای منحنی تغییر بکند.



ق. مشتق اول برای مقادیر ماکیمم یا مینیمم موضعی:

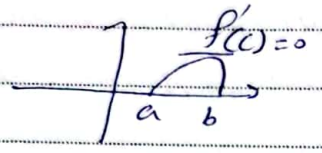
فرض کنید تابع f در یک نقطه داخلی مانند c از بازه‌ای که به آن تعریف شده دارای ماکیمم یا مینیمم نسبی باشد، اگر f' در c وجود داشته باشد آنگاه $f'(c) = 0$.

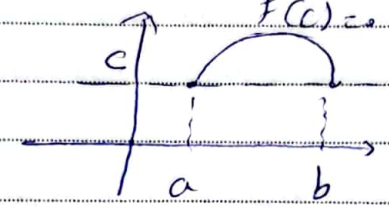
* نقاطی که $f' = 0$ یا f' در آنها وجود ندارد، نقاط بحرانی تابع گویند.

در صفحه بعد ادامه می‌دهم

ق دوم: فرض کنید $y=f(x)$ در هر نقطه از بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته و در هر نقطه‌ای از (a,b) مشتق پذیر باشد. اگر $f(a)=f(b)$ آنگاه حداقل یک نقطه در (a,b) وجود دارد که $f'(c)=0$

در حالت کلی اگر $f(a)=f(b)$ آنگاه حداقل یک نقطه (a,b) هست مانند d که $f'(d)=0$





مثال)

$f(x)=x^3+x+1$

$f'(x)=3x^2+1>0$

تابع یک به یک و تابع صعودی

$f(0)=1$ $\quad -1<0<1$ $\quad$ قضیه پیوستگی

$f(-1)=-1$

$\exists c\in(-1,0) \Rightarrow f(c)=0$

فقط یک نقطه وجود دارد، تابع صعودی است.

«کاربرد مشتق»

تعریف تابع صعودی: تابع $y=f(x)$ را در سراسر بازهٔ I صعودی گویند هرگاه هر $x_1,x_2\in I$ ، $x_1<x_2$ آنگاه $f(x_1)<f(x_2)$:

مشابهاً تابع $y=f(x)$ را در سراسر بازهٔ I نزولی گویند هرگاه هر $x_1,x_2\in I$ ، $x_1<x_2$ آنگاه $f(x_2)<f(x_1)$

مثال: $y=2x$ تابعی صعودی است و $y=-x$ تابعی نزولی است.

«آزمون مشتق اول برای صعودی و نزولی بودن»

فرض کنید که یک تابع مانند f در هر نقطه مانند x از بازهٔ I مشتق پذیر باشد. آنگاه

f بر I صعودی است هرگاه به ازای هر x در I ، $f'(x)>0$.

f بر I نزولی است هرگاه به ازای هر x در I ، $f'(x)<0$.

تعریف تقعر رو به پایین و تقعر رو به بالا:

نمودار تابع مشتق پذیر $y=f(x)$ در بازه‌ای که y' کم می‌شود تقعر رو به پایین دارد و در بازه‌ای که y' زیاد می‌شود تقعر رو به بالا دارد.

آزمون مشتق دوم برای تقعر

می‌دانیم $y=f(x)$ در بازه‌ای که $y''<0$ ، تقعر رو به پایین دارد.

در بازه‌ای که $y''>0$ ، تقعر رو به بالا دارد.

«حقیقت می‌دیگم»

مثلاً نمودار $y=x^2$ در سراسر محور x تقعر رو به بالا دارد، زیرا $y''=2>0$ و $y=\sin x$ در فاصلهٔ $0<x<\pi$ تقعر رو به پایین دارد زیرا در این بازه $y''=-\sin x$ و کمتر از صفر است.

نقاط عطف: نقطه‌ای از نمودار که در آن تقعر عوض می‌شود نقطهٔ عطف نام دارد.
مثلاً $y=x^3$ یک نقطهٔ عطف در $x=0$ دارد که به آن $y''=6x$ تغییر علامت می‌دهد.

قضیه اول. مشتق اول برای مقادیر اکسترمم موضعی (ماکیمم یا مینیمم موضعی)
فرض کنید تابعی مانند f در یک نقطهٔ داخلی مانند c از بازه‌ای که به آن تعریف می‌شود، ماکیمم یا مینیمم موضعی داشته باشد. اگر f' در c تعریف شود آنگاه $f'(c)=0$.
تذکر: توجه کنید که $f'=0$ یا f' در آنها وجود ندارد عموماً نقاط بحرانی f می‌نامند.
البته الزاماً $f'(c)=0$ در نقطه c به معنای ماکیمم یا مینیمم بودن در نقطهٔ c نیست.

قضیه دوم. قضیهٔ رُل:
فرض کنید $y=f(x)$ در همه نقطه از بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته و در هر نقطه از بازهٔ باز (a,b) مشتق پذیر باشد. اگر $f(a)=f(b)=0$ آنگاه حداقل یک نقطه مانند c بین a و b است که $f'(c)=0$.

مثال: چند جمله‌ای $y=x^3-4x$ به ازای هر x، $-\infty<x<\infty$ پیوسته و مشتق پذیر است. اگر فرض کنید $a=-2$ و $b=2$ فرض‌های قضیهٔ رُل برقرارند.
زیرا $f(2)=f(-2)=0$ پس $y'=3x^2-4$ به ازای $c_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ و $c_2=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$
$f'(c_1)=f'(c_2)$

لتبصره ۱: اگر تابع f در یک نقطه مانند c، مشتق پذیر باشد، در آن نقطه پیوسته است.
زیرا
$$\lim_{x\to c} f(x)-f(c)=\lim_{x\to c}(x-c)\cdot\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$
$$=\lim_{x\to c}(x-c)\cdot\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}(x-c)\cdot f'(c)=0$$

پس $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ و لذا f در c پیوسته است.

لتبصره ۲: به کمک مشتق گیری می‌توانیم تعیین کنیم که یک چند جمله‌ای یا یک تابع چند ریشه می‌تواند داشته باشد. مثلاً معادلهٔ $x^3+3x+1=0$ دقیقاً یک ریشهٔ حقیقی دارد. اولاً چند جمله‌ای فوق پیوسته است. ثانیاً $f(0)=1$ و $f(-\frac{1}{2})=-\frac{5}{8}$ ...

Arman

پس بین صفر و $-\frac{1}{2}$ یک ریشه دارد مانند c ولی $f'(x)=3x^2+3$ در بازهٔ $[-\frac{1}{2},0]$ (در همه جا) صعودی است. پس فقط یک ریشه دارد.

قضیهٔ مقدار میانگین:

اگر $y=f(x)$ در هر نقطه از بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته و در هر نقطه از بازهٔ باز (a,b) مشتق پذیر باشد، آنگاه دست کم یک نقطه مانند c بین a و b وجود دارد که

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

مثال) تابع $y=x^3$، $a=-2$، $b=2$. یعنی x^3 روی بازهٔ $[-2,2]$ پیوسته و در $(-2,2)$ مشتق پذیر است. $f(x)=x^3$، $f(a)=-8$ ، $f(b)=8$

نقطه‌ای مانند c هست در $(-2,2)$ که $f'(c)=\frac{8-(-8)}{2-(-2)}=\frac{16}{4}=4$

$f'(x)=3x^2$ ، اگر $3x^2=4$ آنگاه $x^2=\frac{4}{3}$ و لذا $x_1=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ، $x_2=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$

مثال) فرض کنید به ازای همهٔ مقادیر x تابع f پیوسته و مشتق پذیر است و داریم $f(-3)=-3$ و $f(3)=3$ ، $|f'(x)|\le 1$. نشان دهید که $f(0)=0$

برهان ← فرض کنیم $f(0)=t$

$$f'(c)=\left|\frac{f(3)-f(0)}{3-0}\right| \Rightarrow \left|\frac{3-t}{3}\right|\le 1 \Rightarrow |3-t|\le 3$$

لذا $-3\le 3-t\le 3$ پس $0\le t$. همچنین $f'(d)=\left|\frac{f(-3)-t}{-3-0}\right|$

$$=\left|\frac{-3-t}{-3}\right|=\left|\frac{3+t}{3}\right|\le 1$$

$$\Rightarrow |3+t|\le 3 \Rightarrow 3+t\le 3$$

لذا $t\le 0$ در نتیجه $t=0$ یا $f(0)=0$.

نتیجهٔ یک: اگر $F'=0$ آنگاه F یک عدد ثابت است.

اگر به ازای هر x در (a,b) ، $F'(x)=0$ ، آنگاه در سراسر (a,b) ، F یک مقدار ثابت دارد. به عبارت دیگر عدد ثابتی مانند c وجود دارد که به ازای x در (a,b) ، $F(x)=c$.

نتیجهٔ دوم: تابع هایی که مشتق شان یکی است، تفاضلشان مقداری ثابت است.
اگر در هر نقطهٔ x از یک بازهٔ باز (a,b)، $F_1'(x)=F_2'(x)$ آنگاه ثابتی چون c وجود دارد که به ازای هر x در (a,b)، $F_1(x)-F_2(x)=c$.

مثال: فرض کنید تابعی مانند f در هر نقطهٔ $[a,b]$ پیوسته و در هر نقطهٔ (a,b) مشتق پذیر است و داریم $f(a)<f(b)$. نشان دهید که در نقطه‌ای بین a و b، f' مثبت است.

حل. طبق قضیهٔ مقدار میانگین $c\in(a,b)$ موجود است که $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

چون $f(b)>f(a)$ پس $f(b)-f(a)>0$ لذا $f'(c)$ مثبت است $(b-a>0)$

قضیه: قاعدهٔ هوپیتال (صورت اول)

فرض کنید $f(a)=g(a)=0$، $f'(a)$ و $g'(a)$ وجود داشته باشند، $g'(a)\neq 0$ آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$

اثبات قضیه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-0}{g(x)-0}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

قضیه هوپیتال (صورت قوی تر)

فرض کنید $f(x_0)=g(x_0)=0$ و توابع f و g هر دو بر بازهٔ باز (a,b)، که نقطهٔ x_0 را در بر دارد، مشتق پذیر باشند. نیز فرض کنید در هر نقطه از (a,b) بجز احتمالاً در x_0، $g'\neq 0$.

آنگاه با این شرط که حد طرف راست معادلهٔ زیر وجود داشته باشد، داریم:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال ۱:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x}=\frac{0}{1}=0$$

تبصره. در کتاب های پیشرفته تر ثابت می کنند که قاعدهٔ هوپیتال نه تنها در مورد $\frac{0}{0}$ بلکه در مورد صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ نیز به کار می رود. اگر وقتی $x \to a$ ، $f(x)$ و $g(x)$ هر دو به بینهایت میل کنند، آنگاه با این شرط که حد راست تساوی زیر موجود باشد، داریم:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

★ در عاد $x \to a$ ، a می تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

مثال ۲.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1+\tan x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x} = 1$$

مثال ۳.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x-2x^2}{3x^2+5x} = \lim_{x\to \infty} \frac{1-4x}{4x+5} = \lim_{x\to \infty} \frac{-4}{4} = -\frac{2}{3}$$

★ حدهای زیر را حساب کنید:

a) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2}{-\sin x} = \frac{2}{-1} = -2$$

از راه هوپیتال

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-2(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)} = -2\lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin u} = -2\times 1 = -2$$

از راه غیر هوپیتال

$$\frac{\pi}{2} - x = u$$
$$x \to \frac{\pi}{2} \quad u \to 0$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x(-\sin x)}{\cos x - 1} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + (-\sin x) + x(-\cos x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + x\cos x}{-\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x}{-\sin x} + \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos x = 2+1 = 3$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^3+x}) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\sqrt{x^3+x}}{x+\sqrt{x^3+x}}\times\dfrac{x+\sqrt{x^3+x}}{1}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x^3-x}{x+\sqrt{x^3+x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{x+\sqrt{x^3+x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1}{1+\dfrac{3x+1}{2\sqrt{x^3+x}}} = \dfrac{-1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec x}{\tan x} = ?$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec x\tan x}{\sec^2 x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\sec x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{\sec x\tan x}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec x}{\tan x} = \dots$

پس به روش دیگری محاسبه می کنیم.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sin x} = 1$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{10x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim\dfrac{\frac{10}{2\sqrt{10x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5\sqrt{x+1}}{\sqrt{10x+1}} = \dots$ (از هوپیتال)

پس به روش دیگری حل می کنیم.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{10x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim\dfrac{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{10+\frac{1}{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{10+\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \sqrt{10}$